Teori Penaksiran

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

- Telah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa tujuan utama pengambilan sampel dari suatu populasi adalah untuk mengetahui parameter populasi itu sendiri.

- Contoh, misalkan sebuah populasi diketahui berdistribusi normal, tetapi parameter rataan dan variansinya tidak diketahui.

- Contoh lain, suatu populasi diketahui berdistribusi binomial, tetapi parameter p tidak diketahui.

- Oleh karena parameter populasi tidak diketahui, maka dalam statistika inferensi dipelajari cara mengetahui parameter tersebut.

- Ada dua cara yang digunakan untuk mengetahui parameter populasi:

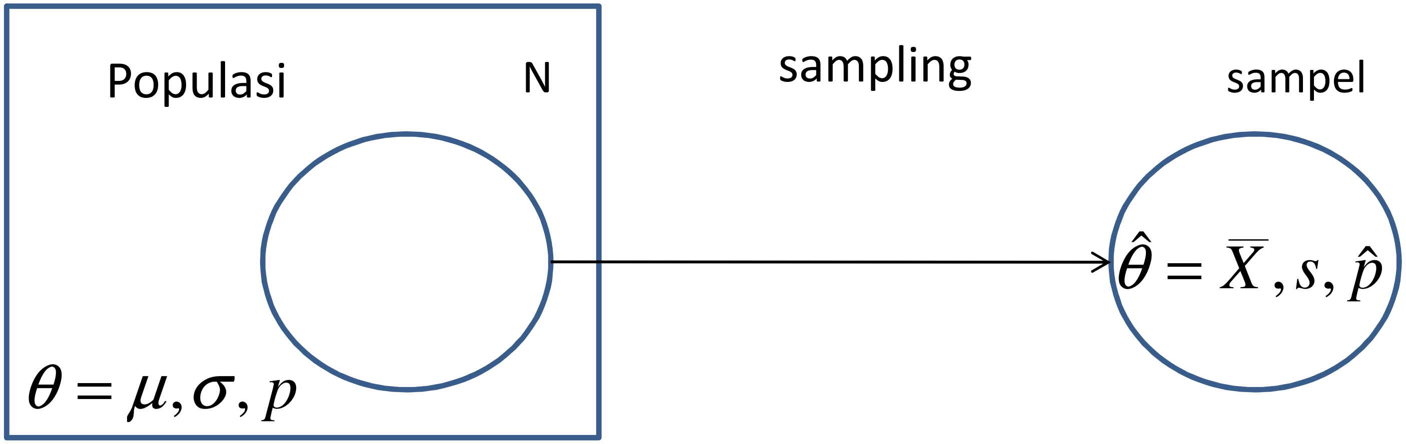
  1. Cara penaksiran (pendugaan)
  2. Cara pengujian hipotesis

- Dua cara di atas didasarkan pada statistik atau besaran yang dihitung dari sampel sehingga kita harus mengambil sampel dari populasi.

Penaksiran dengan Metode Klasik

- Parameter populasi ditulis dilambangkan dengan θ (dibaca *tetha*) dimana θ bisa merupakan rata-rata populasi (yaitu μ), simpangan baku populasi (yaitu σ), dan bisa pula proporsi populasi (yaitu p) pada percobaan binomial.

- Statistik dari sampel ditulis dengan $\hat{\theta}$ dimana $\hat{\theta}$ bisa merupakan rataan sampel (yaitu $\bar{X}$), simpangan baku sampel (yaitu S), dan bisa pula proporsi sampel (yaitu $\hat{p}$)



- Dalam statistika inferensi, statistik $\hat{\theta}$ inilah yang dipakai untuk menaksir parameter θ dari populasi. Tepatnya adalah:

Statistik $\hat{\theta} = \hat{X}$ dipakai untuk menaksir parameter $\theta = \mu$
Statistik $\hat{\theta}$ = S dipakai untuk menaksir parameter $\theta = \sigma$
Statistik $\hat{\theta} = \hat{p}$ dipakai untuk menaksir parameter θ = p

- Statistik yang digunakan untuk mendapatkan taksiran titik disebut **penaksir** atau **fungsi keputusan**.
- Contoh: S^2 , yang merupakan fungsi peubah acak, adalah penaksir σ^2

- Sebuah nilai penaksir tidak diharapkan dapat menaksir parameter populasi tanpa kesalahan, misalkan tidak perlu $\bar{X}$ dapat menaksir μ secara tepat, tetapi diharapkan tidak terlalu jauh dari parameter yang ditaksir.

Penaksir Tak Bias

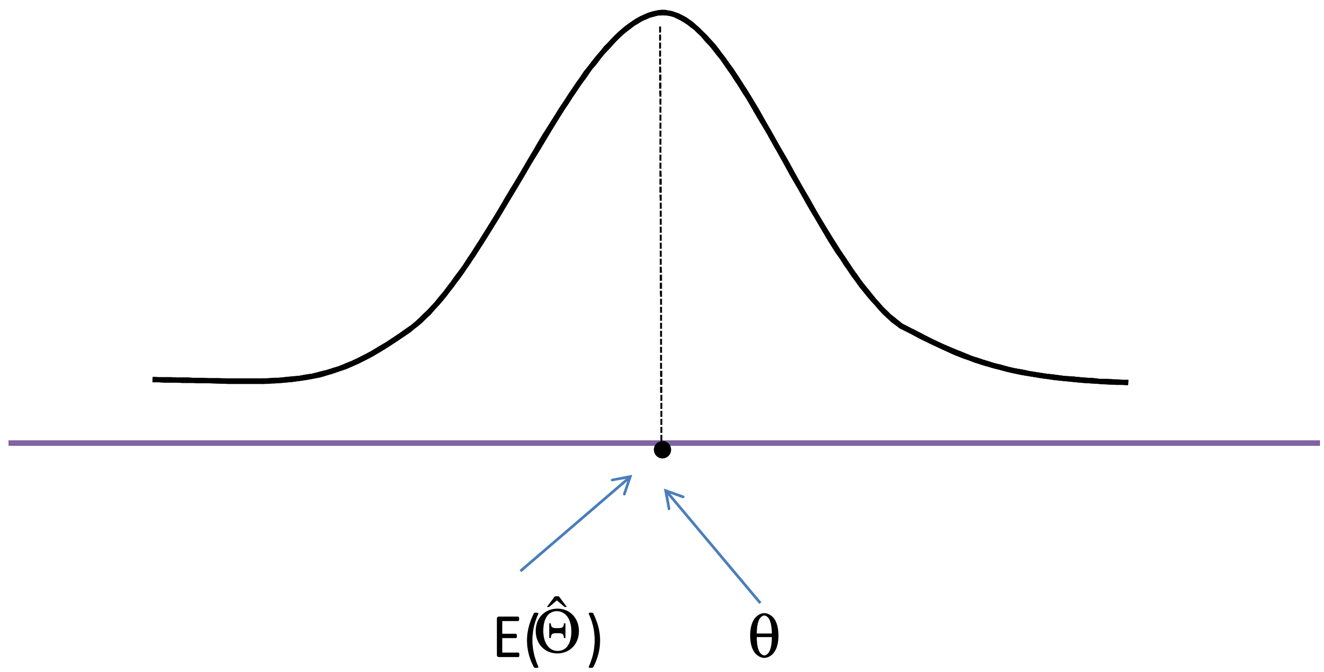
- Misalkan $\widehat{\Theta}$ adalah penaksir dengan nilai taksiran $\hat{\theta}$ dari parameter populasi yang tidak diketahui μ. Kita menginginkan distribusi *sampling* Θ mempunyai rataan sama dengan parameter yang ditaksir.

  Penaksir yang memiliki sifat seperti ini disebut dengan **tak bias (*unbiased*)**.

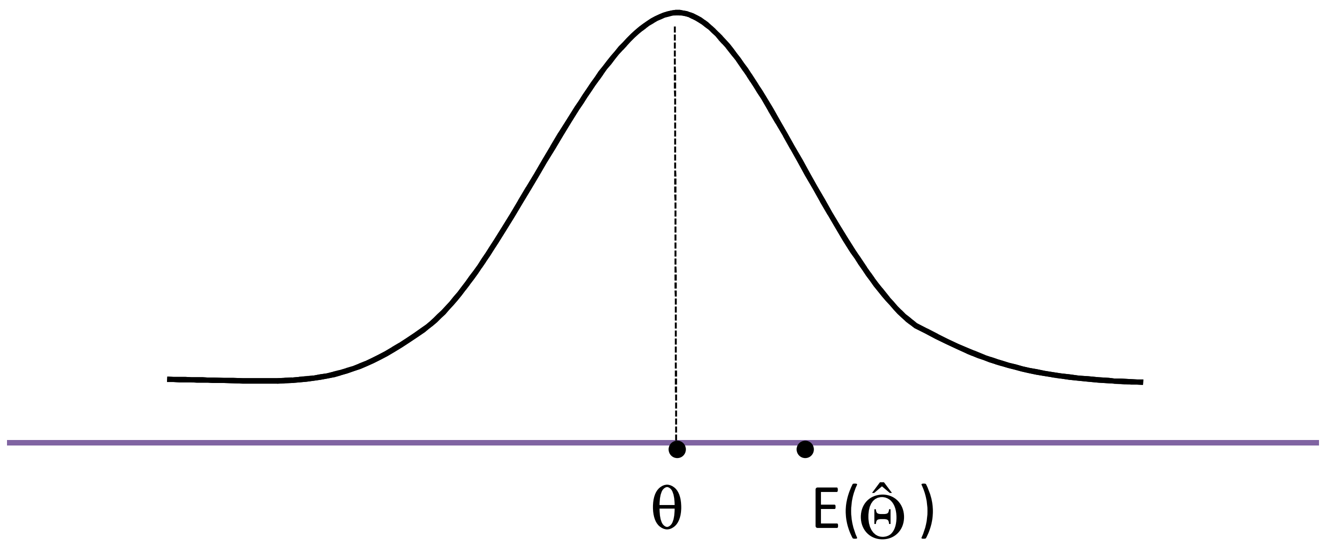
- **Definisi**:

  Sebuah statistik $\widehat{\Theta}$ dikatakan penaksir tak bias dari parameter Θ jika:

$$\mu_{\widehat{\Theta}} = E\left(\widehat{\Theta}\right) = \theta$$



Penaksir tak bias, $E(\hat{\Theta}) = \theta$



Penaksir bias, E($\hat{\Theta}$)$\neq \theta$

- **Contoh 1**. Nilai rataan $\bar{X}$ dari sampel berukuran n yang diambil secara acak dari populasi dengan rataan μ merupakan penaksir tak bias karena $E(\bar{X}) = \mu$. Dalam hal ini, statistik $\hat{\theta} = \bar{X}$ dan parameter $\Theta = \mu$

- **Contoh 2**. Tunjukkan bahwa S^2 adalah penaksir tak bias dari parameter σ^2!

- <u>Jawaban</u>:

  Kita tuliskan

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$
$$- 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2$$

Sekarang tentukan

$$E(S^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 - nE(\bar{X} - \mu)^2\right]$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2{}_{X_i} - n\sigma^2{}_{\bar{X}}\right)$$

Tetapi,

$$\sigma^2{}_{X_i} = \sigma^2 \ \ untuk \ \ i = 1,2,\dots,n \, dan \, \sigma^2{}_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

sehingga

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2$$

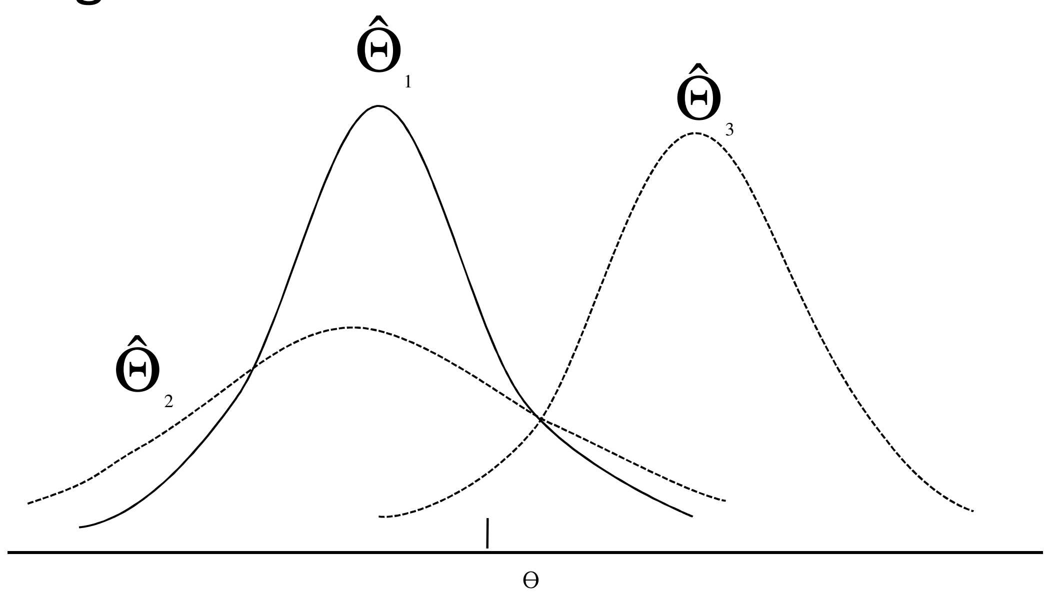
Variansi Nilai Penaksir

- Jika kita mengumpulkan semua penaksir tak bias yang mungkin dari parameter Θ, maka salah satu yang memiliki variansi terkecil dikatakan **penaksir yang paling efisien dari Θ.**

- Jadi, bila $\hat{\Theta}_1$ dan $\hat{\Theta}_2$ adalah penaksir tak bias parameter populasi θ yang sama, maka kita akan memilih penaksir yang variansi distribusi sampelnya paling kecil. Misalkan $\sigma^2_{\hat{\Theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\Theta}_2}$ maka dikatakan $\hat{\Theta}_1$ penaksir θ yang lebih efisien daripada $\hat{\Theta}_2$

Perhatikan Gambar 1, hanya $\hat{\Theta}_1$ dan $\hat{\Theta}_2$ yang tak bias karena distribusinya berpusat di θ.

Karena variansi $\hat{\Theta}_1$ lebih kecil daripada $\hat{\Theta}_2$ maka $\hat{\Theta}_1$ adalah Penaksir paling efisien



Gambar 1 Distribusi *Sampling* dari Penaksir θ yang Berbeda

- Ada dua macam penaksiran:

  1. Penaksiran titik

  Bila nilai parameter θ dari populasi hanya ditaksir dengan memakai satu nilai statistik $\hat{\theta}$ dari sampel yang diambil dari populasi tersebut.

  Contoh: misalkan kita ingin mengetahui rata-rata tinggi orang Indonesia. Diambil sampel acak sebanyak 1000 orang dan diperoleh tinggi rata-ratanya adalah $\hat{X}$ = 164 cm. Nilai ini dipakai untuk menduga rata-rata tinggi orang Indonesia. Karena hanya satu nilai saja sebagai penaksir, maka $\hat{X}$ disebut penaksir titik.

2. Penaksiran selang (interval)

Bila nilai parameter θ dari populasi hanya ditaksir dengan memakai beberapa nilai statistik $\hat{\theta}$ yang berada dalam suatu interval, maka statistik $\hat{\theta}$ disebut **penaksir selang.**

Contoh: rata-rata tinggi orang Indonesia dapat ditaksir berada dalam selang 160 sampai 166 cm, di antara kedua nilai ini terdapat rata-rata sesungguhnya.

Nilai ujung selang 160 dan 166 tergantung pada rataan sampel $\bar{X}$. Bila ukuran sampel membesar, maka $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2 / n$ mengecil, sehingga kemungkinan besar taksiran bertambah dekat dengan parameter μ.

- Kita juga dapat menduga bahwa tinggi rata-rata orang Indonesia berada dalam selang 155 sampai 169 cm.

- Makin lebar intervalnya, makin besar kepercayaan atau keyakinan bahwa rata-rata tinggi orang Indonesia yang kita duga berada pada interval tersebut.

- Artinya, kita lebih percaya selang $155 < \theta < 169$ dibandingkan dengan selang $160 < \theta > 166$.

- Derajat kepercayaan penaksir $\hat{\Theta}$ disebut **koefisien kepercayaan** yang ditulis dengan α dimana $0 < \alpha < 1$ dan dinyatakan dalam bentuk peluang.

- **Derajat kepercayaan** terhadap suatu interval $\hat{\Theta}_1 < \theta < \hat{\Theta}_2$ dinyatakan dalam bentuk peluang, yaitu

$$P(\hat{\Theta}_1 < \theta < \hat{\Theta}_2) = \text{nilai tertentu}$$

- Contoh, misalkan P(160 < θ < 166) = 0.95, itu artinya derajat keyakinan bahwa rata-rata tinggi orang Indonesia berada pada selang 160 sampai 166 adalah 95%.

- Misalkan P(155 < θ < 159) = 0.99, itu artinya derajat keyakinan bahwa rata-rata tinggi orang Indonesia berada pada selang 155 sampai 159 adalah 99%.

- Secara umum, dengan mengambil sampel acak secara berulang-ulang, maka kita akan memperoleh statistik θ sehingga peluang dari interval $\hat{\Theta}_1 < \theta < \hat{\Theta}_2$ akan sama dengan nilai tertentu yang diinginkan adalah

$$P(\hat{\Theta}_1 < \theta < \hat{\Theta}_2) = 1 - \alpha$$

  untuk $0 < \alpha < 1$.

  - α disebut koefisien kepercayaan
  - $1 - \alpha$ disebut tingkat atau derajat kepercayaan
  - Selang $\hat{\Theta}_1 < \theta < \hat{\Theta}_2$ disebut selang kepercayaan $(1 - \alpha)100\%$
  - $\hat{\Theta}_1$ dan $\hat{\Theta}_2$ disebut batas-batas kepercayaan

- Jadi, bila α = 0.05 diperoleh selang keeprcayaan 95%, dan bila α = 0.01 diperoleh selang kepercaayan 99%.

- Makin besar selang kepercayaan, makin yakin kita bahwa selang tersebut mengandung parameter yang tidak diketahui.

- Dalam statistik, lebih disukai memilih interval yang lebih sempit, tetapi dengan derajat kepercayaan yang tinggi. Misalnya, kita lebih memilih selang $160 < \theta < 166$ dengan tingkat kepercayaan 95% daripada selang $155 < \theta < 169$ dengan tingkat kepercayaan 99%.

Menaksir Rataan

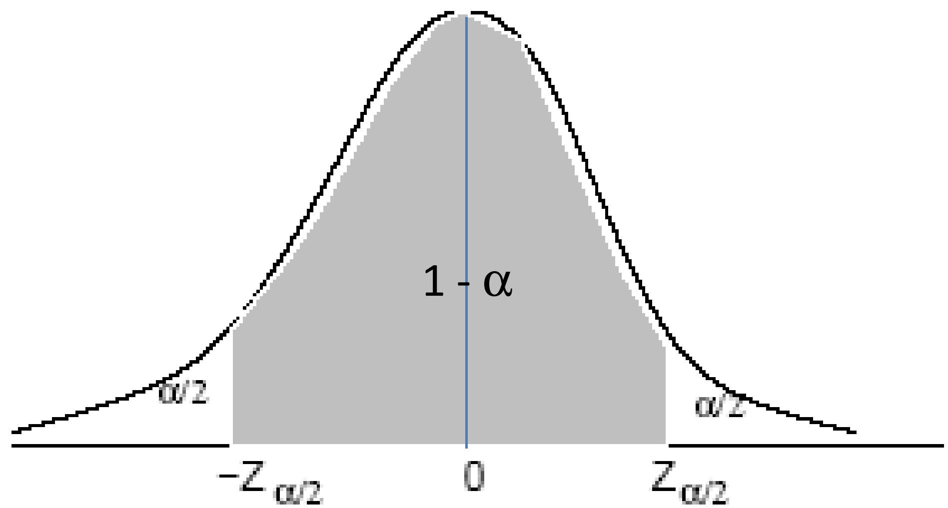
- Akan ditentukan selang taksiran dari μ.

- Misalkan sampel diambil dari populasi normal, atau jika tidak mempunyai ukuran sampel yang besar., selang kepercayaan untuk μ dapat dibuat dengan menggunakan distribusi sampel $\bar{X}$

  Sesuai dengan teorema limit pusat, diharapkan distribusi sampel $\bar{X}$ akan mendekati normal dengan rataan $\mu_{\bar{X}} = \mu$ dan simpangan baku $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$

- Tulislah $z_{\alpha/2}$ untuk nilai z yang di sebelah kanannya terdapat daerah seluas $\alpha/2$,

- Selanjutnya peluang *Z* yang terletak antara $-z_{\alpha/2}\ dan\ z_{\alpha/2}$ ditunjukkan pada kurva berikut:



Gambar 2 $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

- Dari Gambar 2 dapat dilihat:

$$P\left(-z_{\propto/2} < Z < z_{\propto/2}\right) = 1-\propto$$

di mana:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

sehingga:

$$P\left(-z_{\propto/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\propto/2}\right) = 1-\propto$$

atau dapat dituliskan:

$$P\left(\bar{X} - z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\propto$$

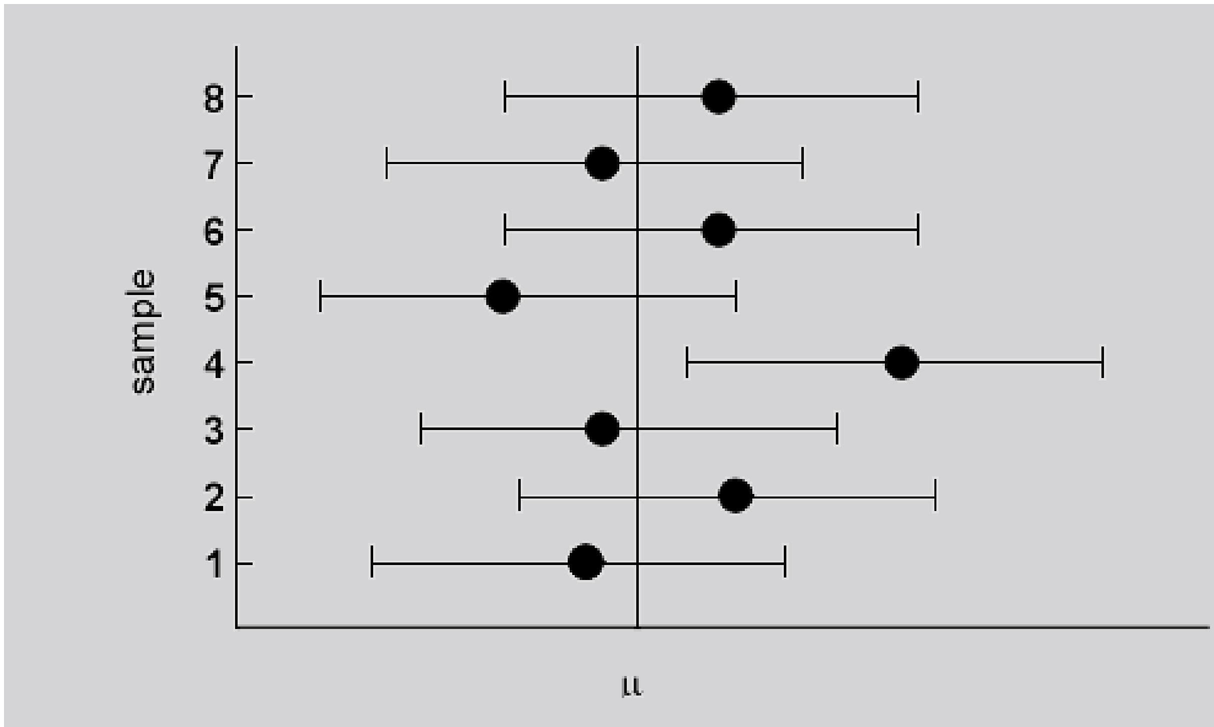
Selang Kepercayaan untuk μ bila *σ* diketahui:

Jika $\bar{x}$ adalah rataan dari sampel acak dengan ukuran *n* dari sebuah populasi dengan variansi σ^2, maka selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dari μ adalah:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

di mana $z_{\alpha/2}$ adalah nilai z yang memberikan luas $\frac{\alpha}{2}$ sebelah kanan nilai tersebut.

- Sampel yang berlainan akan memberikan nilai $\bar{x}$ yang berlainan, sehingga memberikan taksiran selang yang berlainan bagi parameter μ.



Gambar 3 Interval Kepercayaan μ

- Contoh 3:

Rataan nilai matematika sampel acak 36 mahasiswa tingkat sarjana adalah 2.6. Hitunglah selang kepercayaan 95% untuk rataan nilai matematika semua mahasiswa tingkat sarjana. Anggap simpangan baku = 0.3.

Jawaban:

Nilai taksiran dari μ adalah $\bar{x}$ = 2.6, dan 1 - α = 0.95 sehingga α = 0.05. Nilai z yang memberikan luas 0.025 sebelah kanan atau 0.975 sebelah kiri adalah $z_{0.025} = 1.96$ sehingga selang kepercayaan 95 % adalah

$$2.6 - (1.96)\frac{0.3}{\sqrt{36}} < \mu < 2.6 + (1.96)\frac{0.3}{\sqrt{36}}$$

atau $2.50 < \mu < 2.70$

- **Contoh 4**. Masih berkaitan denga soal nomor 3, tentukan selang kepercayaan 99% untuk rataan nilai matematika semua mahasiswa tingkat sarjana.

  Jawaban: Di sini 1 - α = 0.99 sehingga α = 0.01, $z_{\alpha/2} = z_{0.005}$

  Menurut tabel Normal, nilai z yang memberikan luas sebelah kanannya 0.005 adalah $z_{0.005}$ = 2.575

  Selang kepercayaan 99% yang dicari adalah

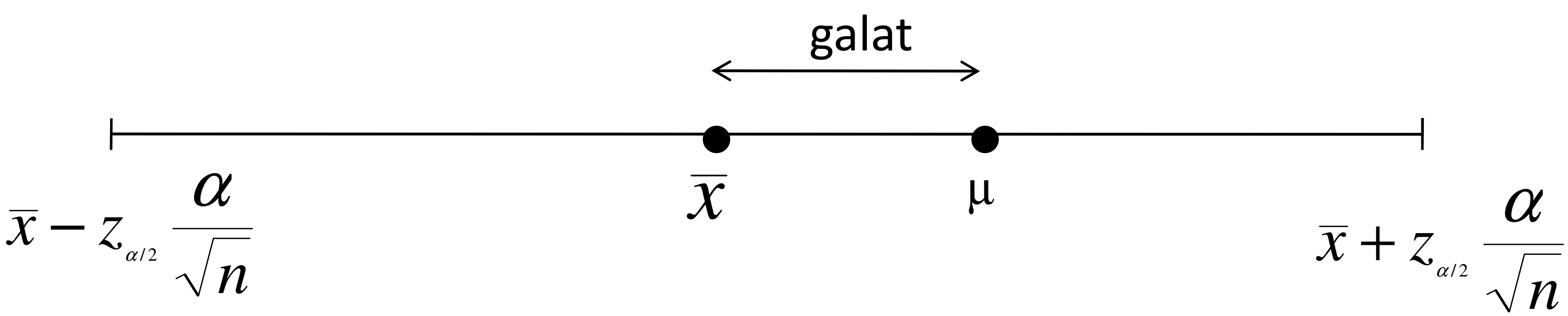
$$2.6-(2.575)\frac{(0.3)}{\sqrt{36}} < \mu < 2.6+(2.575)\frac{(0.3)}{\sqrt{36}}$$

  atau, bila disederhanakan: $2.47 < \mu < 2.73$

  Bila dibandingkan dengan jawaban nomor 3, terlihat bahwa untuk menaksir μ dengan derajat ketepatan lebih tinggi diperlukan selang yang lebih lebar.

- Selang kepercayaan (1 - α)100% memberikan ketepatan taksiran titik, dengan kata lain $\bar{x}$ menaksir μ tanpa kesalahan (galat).

- Tetapi umumnya sampel tidak menghasilkan $\bar{x}$ tepat sama dengan μ tanpa kealahan, sehingga taksiran titik umumnya meleset (mengandung galat)



- Galat < $z_{\alpha/2} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$

- Sebagai contoh, pada soal nomor 3, dengan tingkat kepercayaan 95% perbedaan $\bar{x}$ = 2.6 dengan rataan μ sesungguhnya menghasilkan galat (e)

  e < $1.96 \frac{(0.3)}{\sqrt{36}} = 0.098$

  sedangkan pada soal nomor 4, dengan tingkat kepercayaan 99% perbedaan $\bar{x}$ = 2.6 dengan rataan μ sesungguhnya menghasilkan galat (e)

  e < $2.575 \frac{(0.3)}{\sqrt{36}} = 0.13$

- Teorema (1):

  Jika $\bar{x}$ untuk menaksir μ, kita berada pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dengan kesalahan tidak lebih dari $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Teorema (2):

  Jika $\bar{x}$ dipakai untuk menaksir μ, kita berada pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dengan kesalahan tidak lebih dari *e* apabila ukuran sampel adalah $n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2$

- **Contoh 5**: Berapa jumlah sampel yang diperlukan pada contoh 3 agar kita memiliki tingkat kepercayaan 95% bahwa taksiran μ memiliki kesalahan kurang dari 0.05?

  Jawaban:

  Simpangan baku populasi adalah σ = 0.3. Dengan teorema sebelumnya,

$$n = \left(\frac{(1.96)(0.3)}{0.05}\right)^2 = 138.3 \approx 139$$

  Jadi, dengan kepercayaan 95% sampel acak berukuran 139 akan memberikan taksiran rata-rata-rata yang galatnya kurang dari 0.05

Selang kepercayaan untuk μ bila σ tidak diketahui:

Jika $\bar{x}$ dan *s* adalah rataan dan simpangan baku sampel acak dari populasi normal dengan variansi σ^2 tidak diketahui, selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Dengan $t_{\alpha/2}$ adalah nilai t dengan *n*-1 derajat kebebasan yang memberikan luas $\frac{\alpha}{2}$ sebelah kanan nilai tersebut.

- Penggunaan distribusi t untuk σ yang tidak diketahui berdasarkan anggapan bahwa sampel berasal dari populasi berdistribusi hampir normal (kurva berbentuk lonceng)

- **Contoh 6.** Tujuh botol yang mirip masing-masing berisi minuman 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, dan 9.6 liter. Carilah selang kepercayaan 95% untuk rataan isi botol semecam itu bila distribusinya hampir normal.

  Jawaban: Rataan dan simpangan baku sampel di atas

  $\bar{x}$ = 10.0 dan s = 0.283

  Tingkat kepercayaan = 0.95 = 1 - α → sehingga α = 0.05

  $t_{0.05/2} = t_{0.025}$

  Dari tabel distribusi t diperoleh $t_{0.05/2}$ = 2.447 untuk derajat kebebasan v = n – 1 = 6. Jadi, selang kepercayaan 95% untuk μ adalah

$$10.0 - (2.447)\frac{(0.283)}{\sqrt{7}} < \mu < 10.0 + (2.447)\frac{(0.283)}{\sqrt{7}}$$

  atau 9.74 < μ < 10.26

Menaksir Variansi

- Definisi:

  Jika sampel berukuran *n* diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 dan variasi sampel s^2 dihitung, akan diperoleh nilai statistik S^2 yang digunakan sebagai nilai taksiran dari σ^2.

  Dengan kata lain S^2 adalah penaksir dari σ^2.

  Interval penaksiran ditentukan dengan statistik:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

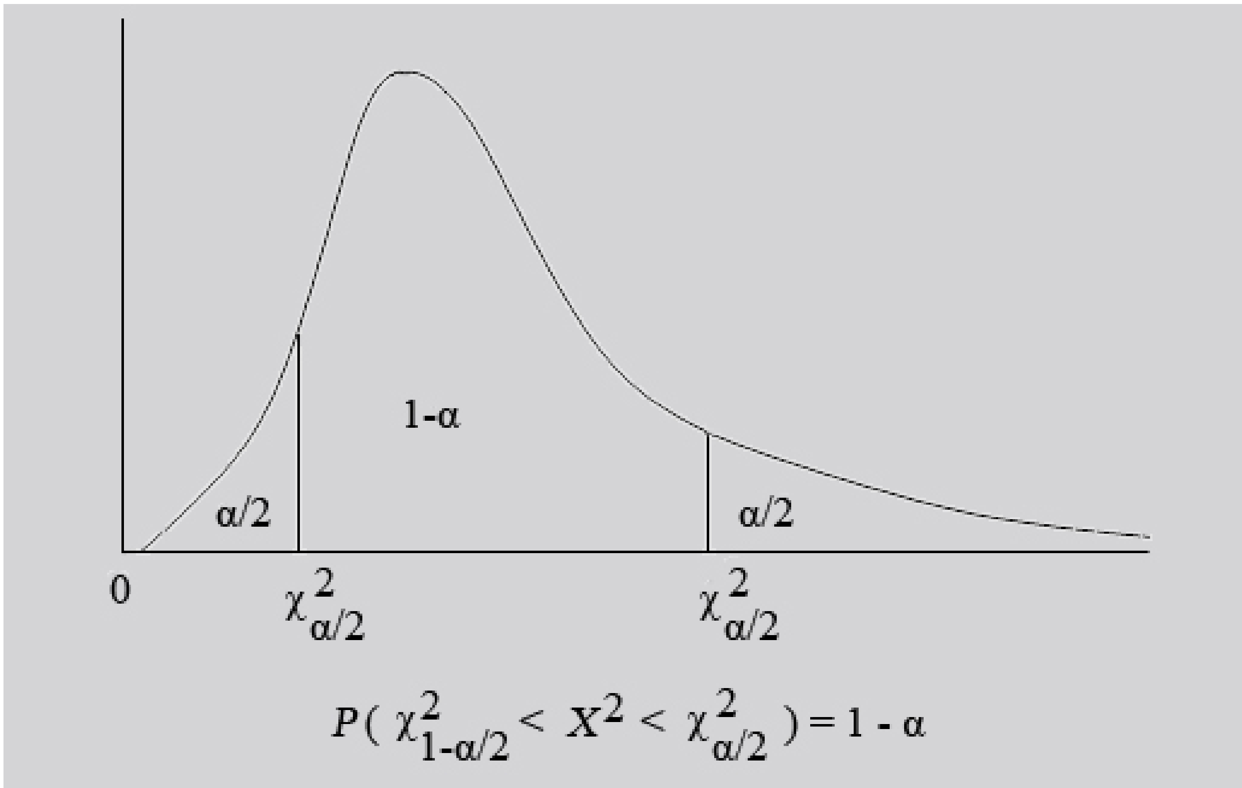
- Statistik X^2 mempunyai distribusi *chi-squared* dengan derajat kebebasan *n* - 1 untuk sampel dari populasi normal.

Selang penaksiran dapat dituliskan:

$$P\left(X^2_{1-\alpha/2} < X^2 < X^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

dengan $X^2_{1-\alpha/2}$ dan $X^2_{\alpha/2}$ adalah nilai-nilai dari distribusi *chi-squared* dengan *n*-1 derajat kebebasan.

- Kurva:



Gambar 4 Interval Penaksiran

- Definisi:

Jika s^2 adalah variansi sampel acak berukuran *n* dari populasi normal, selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dari σ^2 adalah:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

dengan $\chi^2_{\alpha/2}$ dan $\chi^2_{1-\alpha/2}$ adalah nilai *chi-squared* dengan*n*-1 derajat kebebasan yang mempunyai luas di sebelah kanan $\frac{\alpha}{2}$ dan $1-\frac{\alpha}{2}$.

- **Contoh 7**. Berat 10 paket biji rumput yang didistribusikan oleh perusahaan tertentu adalah 46.4; 46.1; 45.8; 47.0; 46.1; 45.9; 45.8; 46.9; 45.2; 46.0. Hitunglah selang kepercayaan 95% dari variansinya, asumsi distribusi normal.

- Jawaban:

Hitung dulu

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(10)(21{,}273.12) - (461.2)^2}{(10)(9)}$$

$$= 0.286$$

Untuk selang 95%, maka $\alpha = 0.05$, dengan tabel chi-kuadrat maka untuk $v = 9$ diperoleh $\chi^2_{0.025} = 19.023$ dan $\chi^2_{0.975} = 2.700$

Dengan demikian selang kepercayaan 95% adalah:

$$\frac{(9)(0.286)}{19.023} < \sigma^2 < \frac{(9)(0.286)}{2.700}$$ atau $$0.135 < \sigma^2 < 0.953$$

Menaksir Nisbah Dua Variansi Dua Sampel

- Definisi (1):

  Taksiran rasio dua variansi populasi σ_1^2 / σ_2^2 adalah rasio dari variansi sampel s_1^2 / s_2^2 .

  Dengan kata lain statistik S_1^2 / S_2^2 adalah penaksir dari σ_1^2 / σ_2^2 .

- Definisi (2):

  Jika s_1^2 dan s_2^2 adalah variansi dari dua sampel saling bebas berukuran n_1 dan n_2 dari populasi normal, maka interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk σ_1^2 / σ_2^2 adalah:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}}(v_2, v_1)$$

  dengan $f_{\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)$ adalah nilai f dengan derajat kebebasan $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$ yang mempunyai luas sebelah kanan $\alpha/2$, serupa untuk $f_{\frac{\alpha}{2}}(v_2, v_1)$ yang mempunyai derajat kebebasan $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$.

- **Contoh 8**. Perusahaan baterai mobil mengklaim bahwa produknya secara rata-rata berumur 3 tahun dengan simpangan 1 tahun. Jika 5 baterai mempunyai umur 1.9; 2.4; 3.0; 3.5; dan 4.2 tahun, tentukan selang kepercayaan 95% untuk σ^2 dan berilah pendapat apakah klaim perusahaan yang menyatakan bahwa $\sigma^2 = 1$ adalah valid? Asumsi distribusi umur baterai adalah normal.

- Jawaban:

Hitung dulu

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(5)(48.26) - (15)^2}{(5)(4)} = 0.815$$

Untuk selang 95%, maka $\alpha = 0.05$ dan dengan tabel chi -kuadrat dengan $v = 4$ maka $\chi^2_{0.025} = 11.143$ dan $\chi^2_{0.975} = 0.484$

Dengan demikian selang kepercayaan 95% adalah:

$$\frac{(4)(0.815)}{11.143} < \sigma^2 < \frac{(4)(0.815)}{0.484} \text{ atau } 0.293 < \sigma^2 < 6.736$$

Kesimpulan: klaim perusahaan bisa diterima karena nilai 1 masih terletak pada selang tersebut.